



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

預賽、決賽選題講解

題目組

國立臺灣大學資訊工程學系 鄭卜王 教授
蔡旻諺、侯欣緯、林煜傑、吳柏燁、黃上恩



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Which is Bigger?

YES: 4
(27 min)

NO: 1045

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d

要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大

F



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果 $a = 0$ 或 1 ，那麼 b 是多少完全不重要，
直接判斷 a 和 $c \times d$ 大小即可

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果 $a = 0$ 或 1 ，那麼 b 是多少完全不重要，
直接判斷 a 和 $c \times d$ 大小即可

如果 $a \geq 2$ ，那 a^b 會成長得很快
當 $b > 54$ 時， a^b 一定會比 $c \times d$ 大

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

1. 讓變數 $x = 1$ 和 $y = c \times d$ 。
2. 將 x 反覆乘以 a ，總共 b 次。
3. 如果中途出現 $x > y$ ，就表示 $a^b > c \times d$
 - 這裡要立即離開迴圈，否則會超時或是有非預期的結果
4. 否則只要看最後的 x 和 y 的大小關係

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

賽中常見問題：pow() 函數

直接使用 $\text{pow}(a, b)$ 去計算 a^b 有可能會得到錯誤結果

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



賽中常見問題：pow() 函數

直接使用 `pow(a,b)` 去計算 a^b 有可能會得到錯誤結果

將 `int` 或是 `long long` 型態傳入 `pow` 時，預設是轉為 `double` 之後才進行內部的運算

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

賽中常見問題：pow() 函數

直接使用 `pow(a, b)` 去計算 a^b 有可能會得到錯誤結果

將 `int` 或是 `long long` 型態傳入 `pow` 時，預設是轉為 `double` 之後才進行內部的運算

而 `double` 運算的**精確度**在此題不夠準確，導致 `pow` 算出的結果和實際的 a^b 不同

F

你要回答一些問題

每道問題有四個非負整數 a, b, c, d
要判斷 a^b 和 $c \times d$ 誰比較大



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



什麼是 double 的精確度？

大致上的概念：想像 $1/3$ ，用小數表示會長得像是 $0.33333\dots$ ，需要無限多位小數才能表示完。



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



什麼是 double 的精確度？

大致上的概念：想像 $1/3$ ，用小數表示會長得像是 $0.33333\dots$ ，需要無限多位小數才能表示完。

但是電腦沒有這麼多空間存一個無限多位的小數，因此會做一些取捨，產生**誤差**。



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



什麼是 double 的精確度？

大致上的概念：想像 $1/3$ ，用小數表示會長得像是 $0.33333\dots$ ，需要無限多位小數才能表示完。

但是電腦沒有這麼多空間存一個無限多位的小數，因此會做一些取捨，產生**誤差**。

也就是說，電腦在進行小數相關的運算時，只會準確到一定的位數。



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d

我們有刻意設計會讓 `pow()` 出錯的測試資料

$$a = 99$$

$$b = 8$$

$$c = 96059600$$

$$d = 96059602$$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d
我們有刻意設計會讓 `pow()` 出錯的測試資料

但是！



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d
我們有刻意設計會讓 `pow()` 出錯的測試資料

但是！

如果有刻意將變數型態先轉成 `long double` 後
再使用 `pow()` 的話，可以通過



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventac



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d
我們有刻意設計會讓 `pow()` 出錯的測試資料

但是！

如果有刻意將變數型態先轉成 `long double` 後
再使用 `pow()` 的話，可以通過

原因：`long double` 的精確度在本題足夠精確



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
INVENTAC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



在本題的範圍限制下，存在會被上述問題影響的 a, b, c, d
我們有刻意設計會讓 `pow()` 出錯的測試資料

但是！

如果有刻意將變數型態先轉成 `long double`
再使用 `pow()` 的話，可以通過



原因：long double 的精確度在本題足夠精確



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Infinite Alarm Clocks

YES: 3
(80 min)

NO: 82

有 N 個鬧鐘。

第 i 個鬧鐘會在時間點 $s_i, s_i + t, s_i + 2t, \dots$ 響起來。

(t 是一個所有鬧鐘共用的數字，每個鬧鐘有自己的 s_i)

在時間點 T (含 T) 以前，有幾個時間點是有鬧鐘響的？
(多個鬧鐘同時響只能算一次)

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



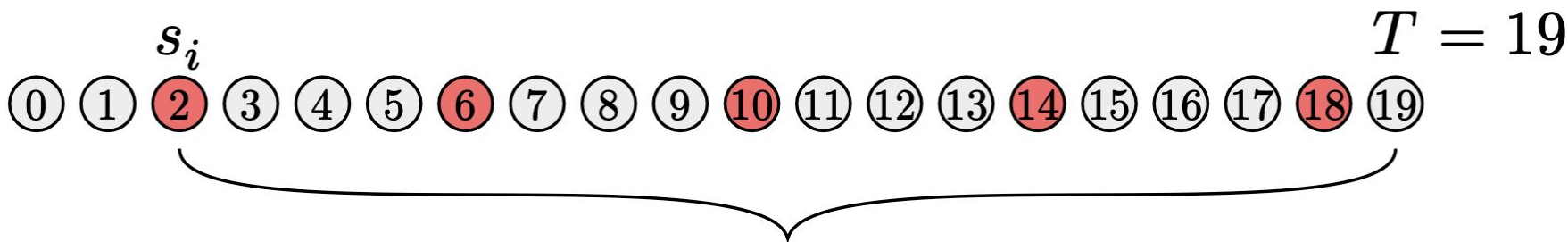
茂業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果沒有鬧鐘同時響要怎麼算？一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$



$$\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil = \left\lceil \frac{19 - 2 + 1}{4} \right\rceil = 5$$

J

有 N 個鬧鐘。

第 i 個鬧鐘會在時間點 $s_i, s_i + t, s_i + 2t, \dots$ 響起來。
(t 是一個所有鬧鐘共用的數字，每個鬧鐘有自己的 s_i)

在時間點 T (含 T) 以前，有幾個時間點是有鬧鐘響的？
(多個鬧鐘同時響只能算一次)



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



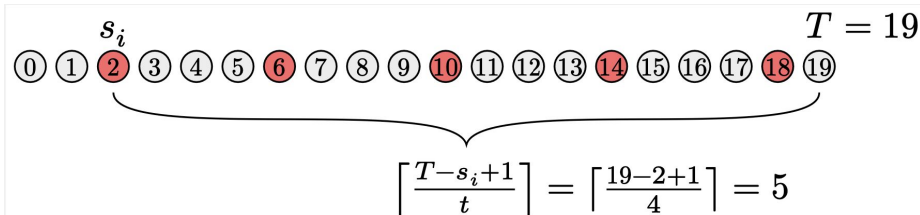
英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

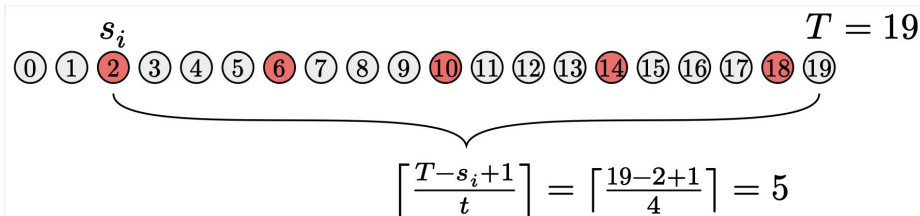


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$

$\lceil x \rceil$ = 向上取整



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTAC



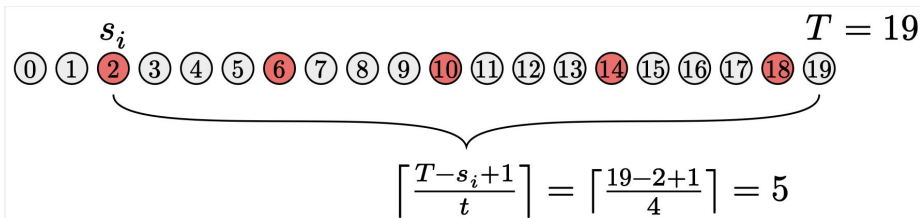
中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$

$\lceil x \rceil$ = 向上取整

怎麼計算向上取整？



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



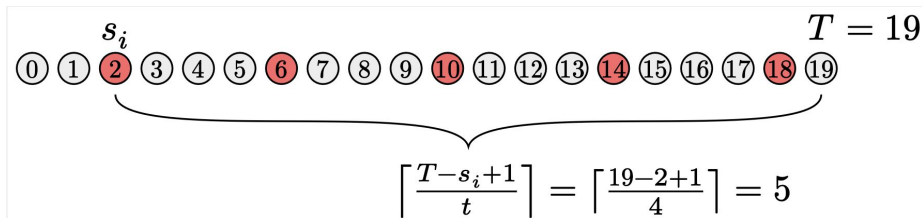
英業達集團
INVENTAC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$



$\lceil x \rceil$ = 向上取整

怎麼計算向上取整？

ceil() 是用浮點數，我們才剛學過不要亂用浮點數

(不過在本題會AC 😊)

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



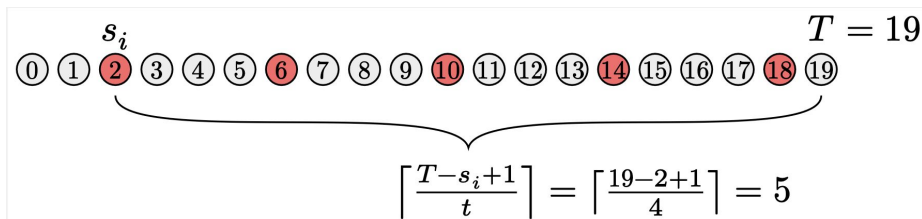
英業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

一個鬧鐘響的次數就是 $\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$



$\lceil x \rceil$ = 向上取整

怎麼計算向上取整？

ceil() 是用浮點數，我們才剛學過不要亂用浮點數

(不過在本題會AC 😊)

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \frac{(a + b - 1)}{b}$$

when $a, b > 0$

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果有鬧鐘同時響怎麼辦？

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



ADVISOR



英業達集團
INVENTEC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果有鬧鐘同時響怎麼辦？
什麼情況下鬧鐘會同時響？

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



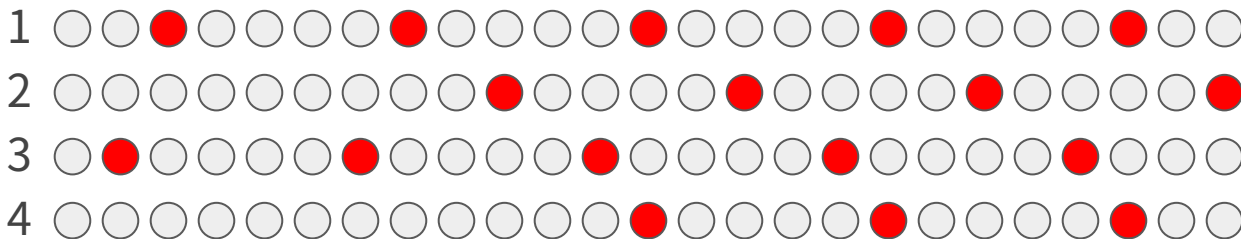
英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果有鬧鐘同時響怎麼辦？
什麼情況下鬧鐘會同時響？



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

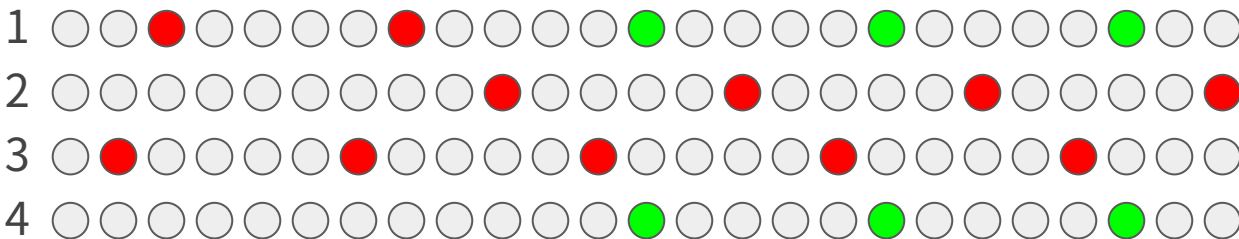


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果有鬧鐘同時響怎麼辦？

什麼情況下鬧鐘會同時響？





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

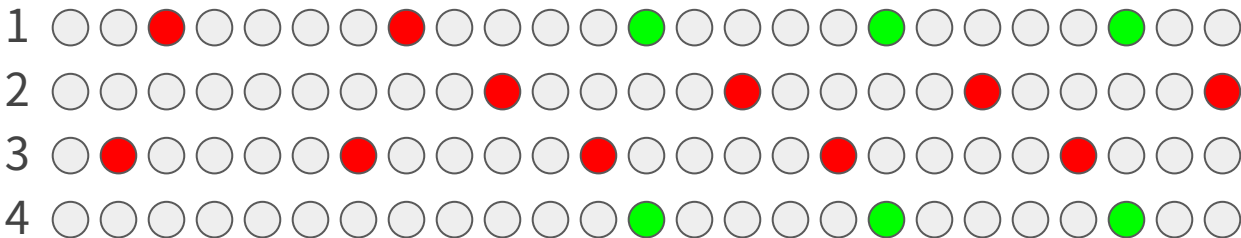


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



重要的觀察



當一個鬧鐘第一次響的時候，要是有另一個鬧鐘也響了，那他們以後永遠都會一起響（因為每次都是 $+t$ ）





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

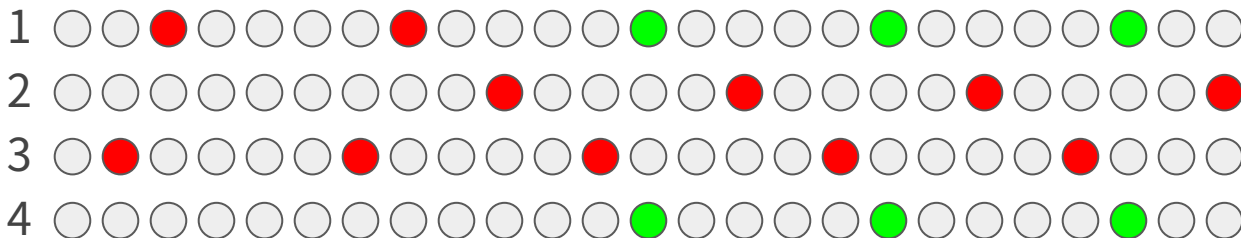


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



重要的觀察



兩個鬧鐘 i, j 同時響的條件就是 $s_i - s_j$ 是 t 的倍數
比較晚開始響的那個鬧鐘不重要

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

把所有鬧鐘按照 $s_i \% t$ 分類

每一類都只有最早開始響的那個鬧鐘有用

- $1 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq t \leq 10^6$
- $0 \leq s_i, T \leq 10^9$

J

```
int n, t, T;
cin >> n >> t >> T;

int ans = 0;
vector<int> tmp(t, -1);
// 每一類最早開始響的鬧鐘是什麼時候響
// -1 代表沒有
for(int i = 1; i <= n; i++){
    int s;
    cin >> s;
    if(tmp[s % t] == -1 || tmp[s % t] > s)
        tmp[s % t] = s;
}
for(int i = 0; i < t; i++){
    if(tmp[i] == -1) continue;
    if(tmp[i] > T) continue;
    ans += (T - tmp[i] + t) / t;
}
cout << ans << "\n";
```



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
invention



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

把所有鬧鐘按照 $s_i \% t$ 分類

每一類都只有最早開始響的那個鬧鐘有用

- $1 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq t \leq 10^6$
- $0 \leq s_i, T \leq 10^9$

```
int n, t, T;
cin >> n >> t >> T;

int ans = 0;
vector<int> tmp(t, -1);
// 每一類最早開始響的鬧鐘是什麼時候響
// -1 代表沒有
for(int i = 1; i <= n; i++){
    int s;
    cin >> s;
    if(tmp[s % t] == -1 || tmp[s % t] > s)
        tmp[s % t] = s;
}
for(int i = 0; i < t; i++){
    if(tmp[i] == -1) continue;
    if(tmp[i] > T) continue;
    ans += (T - tmp[i] + t) / t;
}
cout << ans << "\n";
```

$$\left\lceil \frac{T - s_i + 1}{t} \right\rceil$$

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

把所有鬧鐘按照 $s_i \% t$ 分類

每一類都只有最早開始響的那個鬧鐘有用

- $1 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq t \leq 10^6$
- $0 \leq s_i, T \leq 10^9$



```
int n, t, T;
cin >> n >> t >> T;

int ans = 0;
vector<int> tmp(t, -1);
// 每一類最早開始響的鬧鐘
// -1 代表沒有
for(int i = 1; i <= n; i++) {
    int s;
    cin >> s;
    if(tmp[s/t] == -1 || tmp[s/t] > s)
        tmp[s/t] = s;
}
for(int i = 0; i < t; i++) {
    if(tmp[i] == -1) continue;
    if(tmp[i] > T) continue;
    ans += (T - tmp[i] + t) / t;
}
cout << ans << "\n";
```





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Possibility of Arithmetic

YES: 2

(99 min)

NO: 43

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

初步想法：窮舉所有可能性

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 12345$$

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventec



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

首先，計算可能性的總數。

```
int possibilities = 1;
for (int i = 1; i < n; ++i)
    possibilities *= 3;
```

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventec



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



以 **3 進位** 的方式列舉所有可能性。

```
for (int i = 0; i < possibilities; ++i) {  
    int mask = i;  
    for (int j = 1; j < n; ++j) {  
        if (mask % 3 == 0) // 當成空白  
        else if (mask % 3 == 1) // 當成加法  
        else // 當成減法  
            mask /= 3;  
    }  
}
```

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

給定一種可能性，我們就可以計算他的運算結果！

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

給定一種可能性，我們就可以計算他的運算結果！

要注意：必須先把中間是空白的數字合併，再進行加減法。

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

給定一種可能性，我們就可以計算他的運算結果！

要注意：必須先把中間是空白的數字合併，再進行加減法。

檢查運算結果是不是 X 就好。

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

給定一種可能性，我們就可以計算他的運算結果！

要注意：必須先把中間是空白的數字合併，再進行加減法。

檢查運算結果是不是 X 就好。

WRONG ANSWER ……結果這樣還是不會通過

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



檢查輸入範圍

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



檢查輸入範圍

$N \leq 14$ 且數字都介於 1 和 99 之間。

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X

$N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



檢查輸入範圍

$N \leq 14$ 且數字都介於 1 和 99 之間。

如果全都是空白，串接起來可能會到 99999.....9 總共 28 個 9。

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



檢查輸入範圍

$N \leq 14$ 且數字都介於 1 和 99 之間。

如果全都是空白，串接起來可能會到 99999.....9 總共 28 個 9。

這連 `long long int` 型態都存不下！

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



檢查輸入範圍 – Part 2

但值得注意的是， $|X| \leq 10^{15}$

因此，如果數字「運算到一半」已經超過 10^{17} ，最後肯定不是 X

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

在運算過程中加上特判

```
const long long INF = 1e17;  
if (res < -INF || res > INF || cur > INF) {  
    res = INF;  
    break;  
}
```

M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventorC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

處理完這個問題，就可以通過了！

Remark：記得好好判斷數字的範圍並注意 overflow 等問題。



M

有 N 個數字，要在他們之間插入「空白」、「+」、「-」
使得運算後的結果為 X
 $N \leq 14$ 且數字都介於 1 與 99 之間



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Attacking Castle

YES : 0

(---- min)

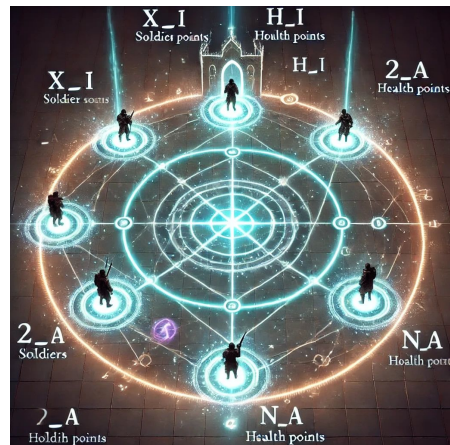
NO : 15

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 A 、 $2A$ 、 \dots 、 NA 秒時
會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的
位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上
會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

N





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



Attacking Castle

YES : 0

(---- min)

NO : 15

圓內有一個砲台，在第 $B + 1$ 、 $2B + 1$ 、... 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A + 2A$ 、...、 NA 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
inventor



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



總共的排列數量最多只有 $8! = 40320$ 種，所以我們可以嘗試枚舉所有魔法可能出現的順序。

枚舉完順序後，我們想辦法模擬一遍操作。

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們使用一個陣列維護目前還活著的士兵們，並使用兩個變數 i, j 代表目前已經使用了幾次魔法以及目前已經發射了幾發砲彈。

比較 $A \times i$ 與 $B \times j + 1$ 哪個小，決定要進行哪種操作。

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



$$A = 6, B = 4, i = 0, j = 0$$

生成士兵



發射砲彈



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

$$A = 6, B = 4, i = 0, j = 1$$

生成士兵



發射砲彈



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



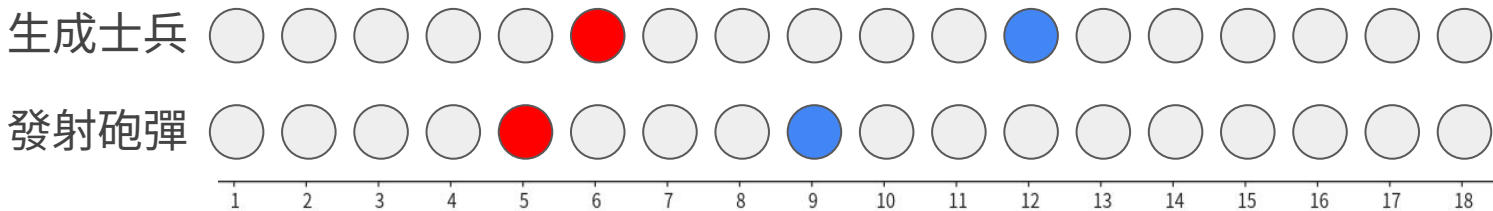
茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

$$A = 6, B = 4, i = 1, j = 1$$



N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



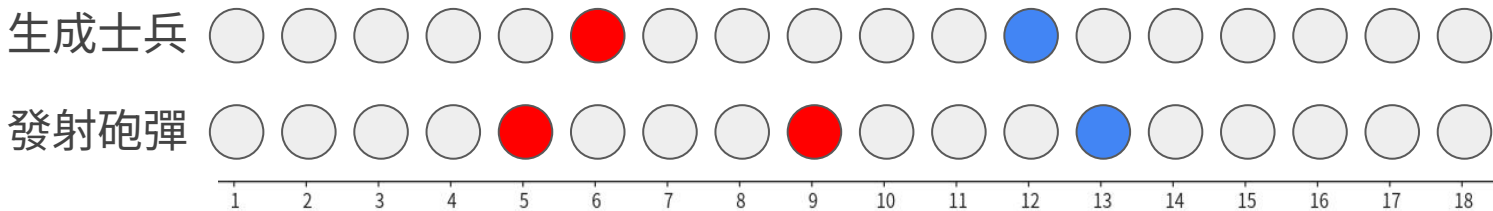
茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

$$A = 6, B = 4, i = 1, j = 2$$



N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

$$A = 6, B = 4, i = 2, j = 2$$

生成士兵



發射砲彈



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



$$A = 6, B = 4, i = 2, j = 3$$

生成士兵



發射砲彈



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

N

二維平面上有一個圓形。

有 N 個魔法，在第 $A, 2A, \dots, NA$ 秒時會隨機選擇一個還沒被使用過的魔法 i ，並在 (x_i, y_i) 的位置召喚一個血量為 h_i 的士兵。

士兵被召喚後會往圓心的方向走，走到圓周上會開始攻擊城堡，攻擊 t 秒就會造成 t 點傷害。

圓內有一個砲台，在第 $B + 1, 2B + 1, \dots$ 秒時會對離圓最近的士兵發射砲彈，若有多個則會擊中血量最低的士兵。被擊中的士兵血量會減一，血量歸零後士兵會死亡。

求造成傷害的期望值。 $N \leq 8$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventorC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如何選擇最近的士兵？

圓到點的距離為該點到圓形的距離減掉半徑，所以只要選擇離圓心最近的士兵即可。

N





臺大盃全國中學生程式設計競賽 National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



寫完但 Time Limit Exceeded 了？

當沒有士兵在場時，若你沒有跳過那些發射砲彈的事件，
時間複雜度會變成 $O(B \times N \times N!)$ ，無法通過本題。

N





臺大盃全國中學生程式設計競賽 National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



寫完但 Time Limit Exceeded 了？

當沒有士兵在場時，若你沒有跳過那些發射砲彈的事件，時間複雜度會變成 $O(B \times N \times N!)$ ，無法通過本題。

直接特判這種情況，將時間設成下一次新士兵生成的時間即可。

此時複雜度會是 $O\left(\sum_{i=1}^N h_i \times N!\right)$ ，能順利通過。





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

決賽 選題講解



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

String in Strings

YES: 18
(7 min)

NO: 75

輸入兩個只有小寫英文的字串 s, t

找出任何一個**非空連續子字串**

例：

looks good

D



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

想法：

題目敘述並無要求答案長度要盡量長

如果一個字串是答案，那它的子字串也是答案

例：

happyholidays happybirthday

happyholidays happybirthday

D



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

關鍵想法：

答案存在的話，一定存在有**只有一個字元**的答案

- 只需要判斷 “a”，“b”，“c”，...，“z” 是否可行

D



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

作法 1：

對於 $a \sim z$ 每一個字元，判斷它是不是存在於 s 和 t 中

作法 2：

先記錄 s 和 t 中分別存有哪些字元，再尋找有無共同出現的字元

D



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Testers

YES: 0 **NO**: 15
(N/A min)

給你一個序列 a_1, a_2, \dots, a_N ，有一些地方是 -1 ，你要把 -1 改成 $1 \sim N$ 的數字，得到一個序列 b_1, b_2, \dots, b_N 使得

- 它是一個 $1 \sim N$ 的排列 (permutation)
- $b_i \neq i$

也就是說， b_1, b_2, \dots, b_N 是一個錯排 (derangement)

F



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

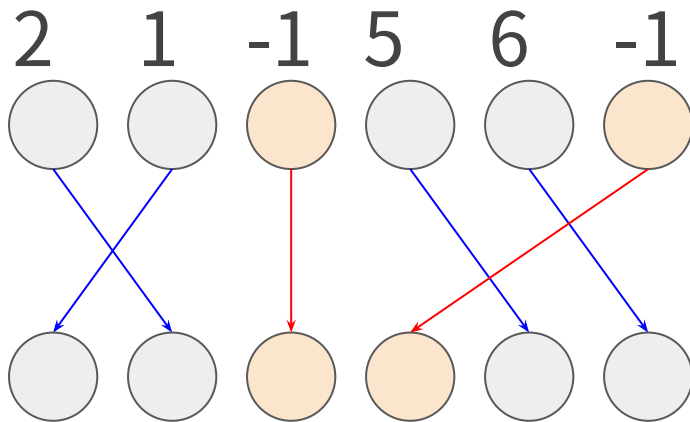


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

錯誤作法 1

把第 i 個沒測題的人對應到第 i 個沒有測的題目



F



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC

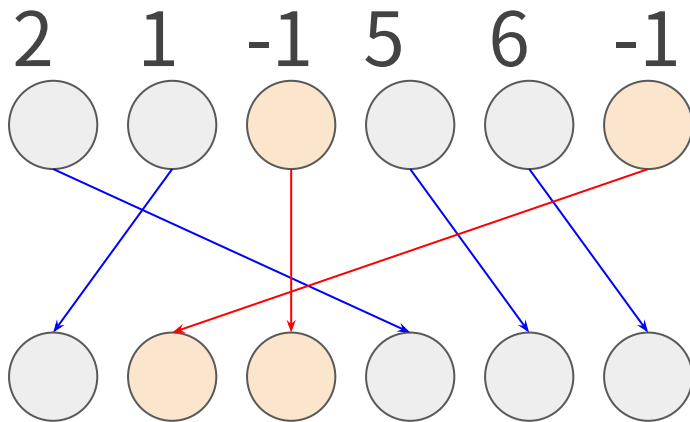


ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

錯誤作法 2

把第 i 個沒測題的人對應到第 $i+1$ 個 (循環) 沒有測的題目



F



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們先把沒測題的人和沒測試的題目分成兩類：

1. 同個人沒測題、他的題目也沒有人測的
2. 其他



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們先把沒測題的人和沒測試的題目分成兩類：

1. 同個人沒測題、他的題目也沒有人測的
2. 其他

把第 1 類的移到前面、第 2 類的移到後面、剩下的不用管
然後套用錯誤作法 2



臺大盃全國中學生程式設計競賽 National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding

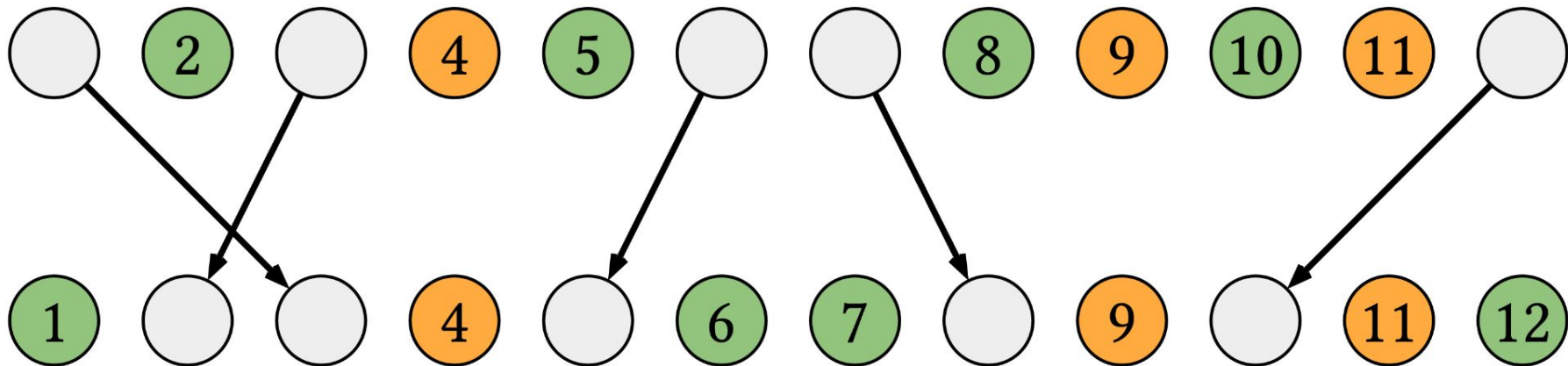


茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding

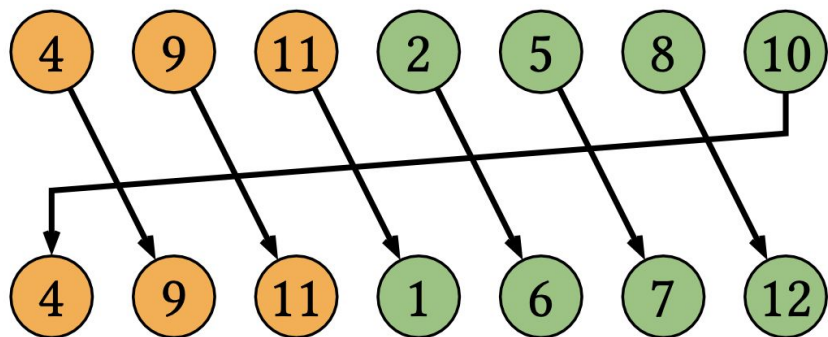


英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



第 2 類的人怎麼連都不會連到自己的題目

第 1 類的人，他出的題就在自己下面

題目說保證有解，所以不會只有一個人/題



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

```
int n;
cin >> n;

vector<int> a(n + 1), tester(n + 1, -1);
for(int i = 1; i <= n; i++){
    cin >> a[i];
    if(a[i] != -1) tester[a[i]] = i;
}

vector<int> out, in;
for(int i = 1; i <= n; i++){ // 第一類
    if(a[i] == -1 && tester[i] == -1){
        out.emplace_back(i);
        in.emplace_back(i);
    }
}
```

```
for(int i = 1; i <= n; i++){ // 第二類
    if(a[i] == -1 && tester[i] == -1) continue;
    if(a[i] == -1) out.emplace_back(i);
    if(tester[i] == -1) in.emplace_back(i);
}

vector<int> b = a;
int m = out.size();
for(int i = 0; i < m; i++)
    b[out[i]] = in[(i + 1) % m];
for(int i = 1; i <= n; i++)
    cout << b[i] << " \n"[i == n];
```

F



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
inventec



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

本題可能還有不少創意解法，以上只是提供一個正確性比較顯然、也挺好寫的作法，以下提供另外兩個作法：

- 對於每個沒有測題的人，都隨便找一個不是他的題目給他測，最後一個人可能會得要測自己的題目，這個時候找另一個本來沒測題的人跟他交換
- random 一個把數字填好之後是 permutation 的答案，直到是錯排為止，這麼做的成功率最慘大約是 $1/e$ ，因為 $\text{derangement 數量} / \text{permutation 數量} \approx 1/e$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Growing Trees

YES: 1 **NO**: 3
(89 min)

題目：給定一個 $n \times m$ 表格，一開始每個格子上的數字都是 0。接下來會進行數次操作，每次操作會選擇一個 3×3 子矩陣並將上面的數字都 +1。現在給定表格上數字的內容，請還原出操作的內容。



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



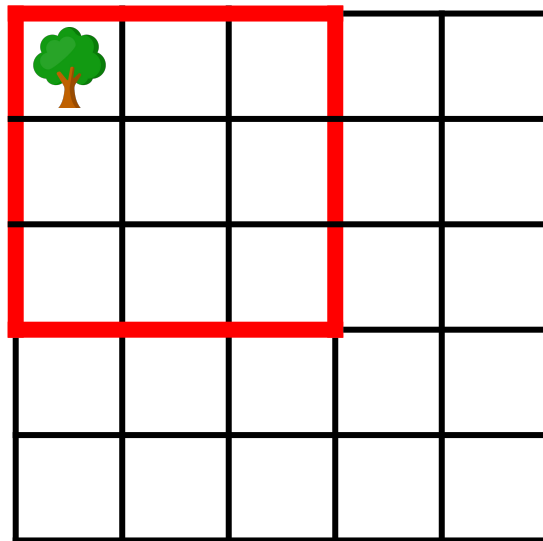
英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

觀察：只有一種操作可以影響到左上角的格子



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



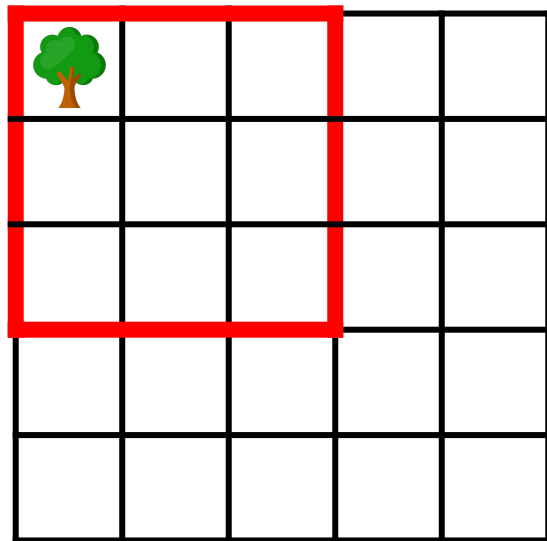
英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

左上角的數字其實就是左上角 3×3 子矩陣的操作數量。



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

考慮完左上角 3×3 子矩陣的操作後，我們繼續考慮它右邊的樹

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



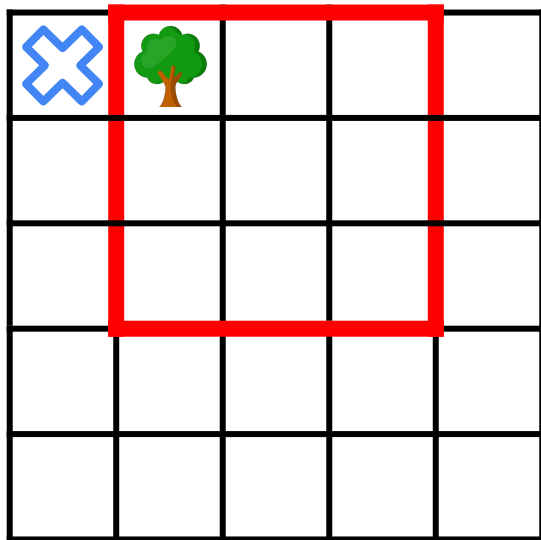
英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

注意到依然只有一種操作可以影響到當前的樹



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們可以繼續這樣移動下去，直到第一個 row 的操作都被考慮完

X	X	X	X	X

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



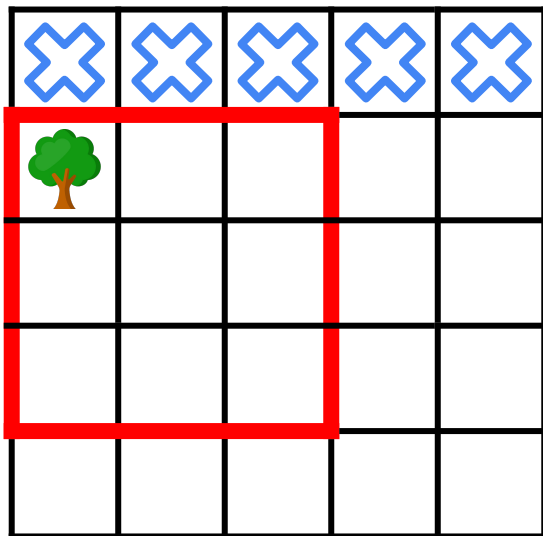
茂業達集團
inventec



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

繼續考慮下一個 row !



J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

總結：在考慮完一種操作後，更新此操作對應的那 9 個格子的數字

剩下就只要按照前面的方式由上而下、左到右掃過一次陣列即可

```
for (int i = 0; i + 2 < N; ++i) for (int j = 0; j + 2 < M; ++j) {  
    cout << a[i][j] << " \n"[j == M - 3];  
    for (int x = i + 2; x >= i; --x) for (int y = j + 2; y >= j; --y) {  
        a[x][y] -= a[i][j];  
    }  
}
```

J



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Torch Maker

YES : 0

NO : 0

(N/A min)

題目：你有 N 個原木，你可以按左圖的配方合成物品，或是消耗物品獲得能量，一點能量可以把一個原木變成一個木炭，求你最多可以做幾枝火把

- 1 個原木 → 4 個木材
- 2 個木材 → 4 個木棍
- 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

如果你玩過 Minecraft，那這題對你來說比較難，因為這些數字跟遊戲中的不一樣

	燃料	能量
1 個原木		1 點
1 個木材		1 點
1 個木棍		0.2 點
1 個木炭		8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果要拿木棍去燒，那即便燒了 4 個都還沒有 1 點能量，不如拿原料的 2 個木材去燒

1 個原木 → 4 個木材
2 個木材 → 4 個木棍
1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果要拿木棍去燒，那即便燒了 4 個都還沒有 1 點能量，不如拿原料的 2 個木材去燒

如果要拿原木去燒，不如把它換成 4 個木材去燒

1 個原木 → 4 個木材
 2 個木材 → 4 個木棍
 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

如果要拿木棍去燒，那即便燒了 4 個都還沒有 1 點能量，不如拿原料的 2 個木材去燒

如果要拿原木去燒，不如把它換成 4 個木材去燒

如果要燒 5 個木材，不如拿其中 4 個的原料的原木 + 1 個木材去燒成木炭，再拿去燒

1 個原木 → 4 個木材
 2 個木材 → 4 個木棍
 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

木棍和原木不會被拿去燒
整個過程頂多燒 4 個木材
然後就不會了...

1 個原木 → 4 個木材
2 個木材 → 4 個木棍
1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

木棍和原木不會被拿去燒
整個過程頂多燒 4 個木材

然後就不會了...

如果我們只想知道

「有沒有辦法做出至少 K 個火把」
要怎麼辦？

1 個原木 → 4 個木材
2 個木材 → 4 個木棍
1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們最後一定要有

K 個木棍 + K 個木炭

因為我們要 K 個木炭，一定要留 K 個原木下來

- 1 個原木 → 4 個木材
- 2 個木材 → 4 個木棍
- 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

	燃料	能量
1 個原木		1 點
1 個木材		1 點
1 個木棍		0.2 點
1 個木炭		8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們最後一定要有

K 個木棍 + K 個木炭

1 個原木 → 4 個木材

2 個木材 → 4 個木棍

1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

因為我們要 K 個木炭，一定要留 K 個原木下來

為了做這 K 個木棍，我們需要

$\lceil \frac{K}{4} \rceil \times 2$ 個木材，因此我們需要把
 $\lceil \frac{\lceil \frac{K}{4} \rceil \times 2}{4} \rceil$ 個原木換成木材

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點

L



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
INVENTAC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

為了做出那 K 根木棍，我們可能會有一些多的木棍和木材，木棍就沒有用了，木材只能拿去燒

1 個原木 → 4 個木材
 2 個木材 → 4 個木棍
 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventor



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

為了做出那 K 根木棍，我們可能會有一些多的木棍和木材，木棍就沒有用了，木材只能拿去燒

我們的目標是擁有 K 點能量

沒事不用換木材，有能量就可以直接拿原木燒一個木炭出來，這樣可以用 1 點能量換 8 點能量

1 個原木 → 4 個木材
 2 個木材 → 4 個木棍
 1 個木棍和 1 個木炭 → 1 個火把

燃料	能量
1 個原木	1 點
1 個木材	1 點
1 個木棍	0.2 點
1 個木炭	8 點





臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
inventec



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

```
using ll = long long;
```

```
ll check(ll ans){  
    ll stick_group = (ans + 3) / 4; // ceil(ans / 4)  
    ll woods_for_sticks = stick_group * 2;  
    ll logs_for_sticks = (woods_for_sticks + 3) / 4; // ceil(woods_for_sticks / 4)  
    ll log = ans + logs_for_sticks; // 需要幾個原木  
    ll energy = logs_for_sticks * 4 - woods_for_sticks;  
    if(energy == 0){  
        log++;  
        energy += 4;  
    }  
    ll need = max(0LL, ans - energy);  
    log += (need + 6) / 7; // ceil(need / 7)  
    return log;  
}
```

L



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

現在我們會算做 K 個火把需要幾個原木

越多火把需要越多原木

所以我們可以使用「二分搜尋法」

找到最多可以做多少火把

```
ll n;  
cin >> n;  
ll l = 0, r = n + 1;  
while(l + 1 < r){  
    ll mid = (l + r) / 2;  
    if(check(mid) <= n) l = mid;  
    else r = mid;  
}  
cout << l << "\n";
```

L



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



Experimental Data

YES: 1

(98 min)

NO: 2

有 N 個整數 a_1, a_2, \dots, a_N 和 Q 道問題

每道問題會指定 a 的某個連續片段 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r

假設這片段的變異數為 V ，要輸出 $(r - l + 1)^2 \times V$

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

題目有告訴大家該如何計算 K 個數字 x_1, x_2, \dots, x_K 的變異數：

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_i - \bar{x})^2$$

但直接使用這個形式去計算會太慢

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



實際上變異數有另一種表示法：

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i^2 - \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i \right)^2$$

直接計算還是太慢，我們需要能夠快速找出以下資訊：

1. 區間總和
2. 區間平方總和

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們可以在回答問題前計算兩種前綴和 (prefix sums) :

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$$

$$T_i = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_i^2$$

利用這些前綴和，我們能快速找到所需要的區間資訊

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

用第二種變異數的表示法，我們可以知道變異數會等於

$$\frac{1}{r-l+1}(T_r - T_{l-1}) - \left(\frac{1}{r-l+1}(S_r - S_{l-1}) \right)^2$$

而因為我們要輸出的是 $(r-l+1)^2 \times V$ ，所以只需要輸出

$$(r-l+1)(T_r - T_{l-1}) - (S_r - S_{l-1})^2$$

M



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Tidy Up the Desktop

YES: 0

NO: 0

(N/A min)

二維平面上有 N 個點，要求用最少個矩形選取這些點，使得特定的其中一些點被選取的次數為奇數次，其他都是偶數次。

$$N \leq 14$$

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

觀察：有用的矩形種類數不多！

如果兩個矩形包含到同一群點，那造成的效果根本就是一樣的

要怎麼找出所有有用的矩形？

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding

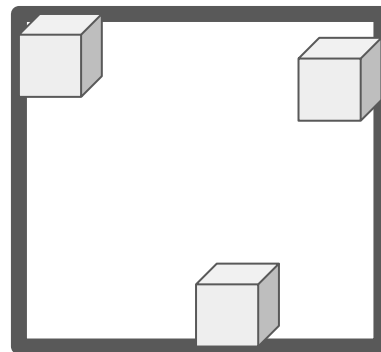
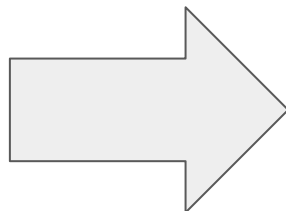
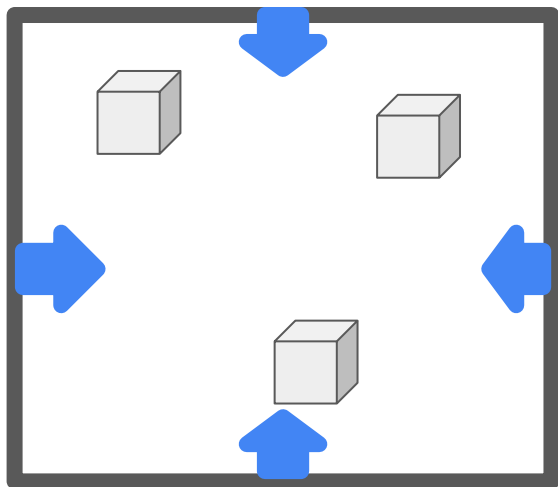


英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



矩形的上、下、左、右一定能從給定的座標湊出！

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們將所有的 x, y 座標蒐集起來，就可以窮舉出所有有用的矩形
接著要怎麼找尋「最少」的矩形數量呢？

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

將「每個文件現在是否有被選取」的狀態當成點

將「選取某個矩形」的操作當成邊

=> 原題變成一張圖論上的經典問題 – 最短路徑問題！

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們有 2^N 個點、每個點都有 N^4 條邊

- 每個文件是否有選取 $\Rightarrow 2^N$ 個點
- 矩形的每個邊界都有 N 種可能 $\Rightarrow N^4$ 種矩形 $\Rightarrow N^4$ 條邊

因此，使用「廣度優先搜尋 (Breadth First Search)」演算法，就可以在 $O(N^4 2^N)$ 的時間內找到答案！

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



茂業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們有 2^N 個點、每個點都有 N^4 條邊

- 每個文件是否有選取 $\Rightarrow 2^N$ 個點
- 矩形的每個邊界都有 N 種可能 $\Rightarrow N^4$ 種矩形 $\Rightarrow N^4$ 條邊

因此，使用「廣度優先搜尋 (Breadth First Search)」演算法，就可以在 $O(N^4 2^N)$ 的時間內找到答案！

挑戰：你能將這題優化到 $O(N^2 2^N)$ 、甚至 $O(N 2^N)$ 嗎？（這很難）

N



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

Ai-chan's Matchsticks

YES : 0

NO : 3

(N/A min)

題目：

給一個正整數 N

請計算：

使用剛剛好 N 支火柴棒能夠拼出多少種非負整數

只需要輸出這個數量除以 998244353 的餘數

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

0 ~ 9 用火柴棒的拼法跟 7 段顯示器一樣

- 最多只需要用 7 根火柴棒就能拚出一位數

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

考慮動態規劃 (dynamic programming)

讓 $dp[n]$ 代表使用 n 支火柴棒能夠組出幾個**正整數**

- 只有在 $N = 6$ 的時候才需要考慮 0，因此我們暫時忽略

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

在一個正整數後面接一個 0 ~ 9 的數字就變成一個新的正整數

- 例：32471 後面放 6 就變成 324716

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

讓 $\text{cost}(x)$ 代表拼出 x 需要幾支火柴棒

- 例： $\text{cost}(0) = 6$, $\text{cost}(1) = 2$, $\text{cost}(2) = 5$, ..., $\text{cost}(9) = 6$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

當 $n > 7$ 時，

$$dp[n] = dp[n - cost(0)] + dp[n - cost(1)] + \dots + dp[n - cost(9)]$$

$$dp[2] = 1, dp[3] = 1, dp[4] = 2, dp[5] = 5, dp[6] = 7, dp[7] = 12$$

$$dp[\text{小於等於 } 1] = 0$$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們只要一步步算出 $dp[1], dp[2], dp[3], \dots, dp[N]$ 就好嗎？

- $N \leq 10^{18}$
- 太慢了

有辦法快速得到 $dp[N]$ 嗎？

有！

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



茂業達集團
inventac



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

我們可以用矩陣來表示我們的轉移式：

$$\begin{bmatrix} dp[n] \\ dp[n-1] \\ dp[n-2] \\ dp[n-3] \\ dp[n-4] \\ dp[n-5] \\ dp[n-6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp[n-1] \\ dp[n-2] \\ dp[n-3] \\ dp[n-4] \\ dp[n-5] \\ dp[n-6] \\ dp[n-7] \end{bmatrix}$$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
INVENTOR



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

我們用 A 稱呼那一個 7×7 矩陣

D_n 為由 $dp[n], dp[n - 1], \dots, dp[n - 6]$ 組成的 7×1 矩陣

那麼前一頁的矩陣等式會變成 $D_n = A \times D_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} dp[n] \\ dp[n-1] \\ dp[n-2] \\ dp[n-3] \\ dp[n-4] \\ dp[n-5] \\ dp[n-6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dp[n-1] \\ dp[n-2] \\ dp[n-3] \\ dp[n-4] \\ dp[n-5] \\ dp[n-6] \\ dp[n-7] \end{bmatrix} = D_n$$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

觀察到 $D_N = A^{N-7} D_7$

而 $D_7 = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

⇒ 只需要快速算出 A^{N-7} 就好

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

考慮矩陣快速冪，假設函數 $f(M, k)$ 的目標是回傳 M^k

- 如果 $k = 1$ ，則 $f(M, k) = M$
- 如果 k 是偶數，則 $f(M, k) = f(M, k/2)^2$
- 如果 k 是奇數，則 $f(M, k) = f(M, (k - 1)/2)^2 M$

我們需要的是 $f(A, N - 7)$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

這樣會變快多少？

直接暴力算矩陣的 n 次方： $O(7^3 N)$

使用矩陣快速冪： $O(7^3 \log N)$



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR



Hextar Holding



英業達集團
inventac



中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會



有了 $f(A, N - 7) = A^{N-7}$ ，我們就可以直接用它和 D_7 算出 D_N
而 D_N 的第一項就是 $dp[N]$

$$D_n = \begin{bmatrix} dp[n] \\ dp[n-1] \\ dp[n-2] \\ dp[n-3] \\ dp[n-4] \\ dp[n-5] \\ dp[n-6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times D_{n-1}$$

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

解法：

- 大部分的運算都要在運算過後取除以 998244353 的餘數，不然結果會太大導致 overflow
- $N = 6$ 時恰好能拚出 “0”
此時答案要多加上 1

0



臺大盃全國中學生程式設計競賽

National Secondary School Programming Contest 2024

ORGANIZER



國立臺灣大學
NTU



臺大校友會
AANTUM

CO-ORGANIZER



拉曼大學
UTAR

SPONSOR

Hextar

Hextar Holding



英業達集團
INVENTEC



ADVISOR

中華民國教育部 | 中華民國僑務委員會

程式設計(編程)的角度：

自動化、解決或協助人們計算出較為複雜的問題

祝福大家在程式解題的領域中在不斷精進的同時，也能享受想通一道題目的一瞬間，並且在未來能成功克服各式各樣的挑戰，謝謝大家！